DM de maths pour décembre

eDevoir

1er mars 2011

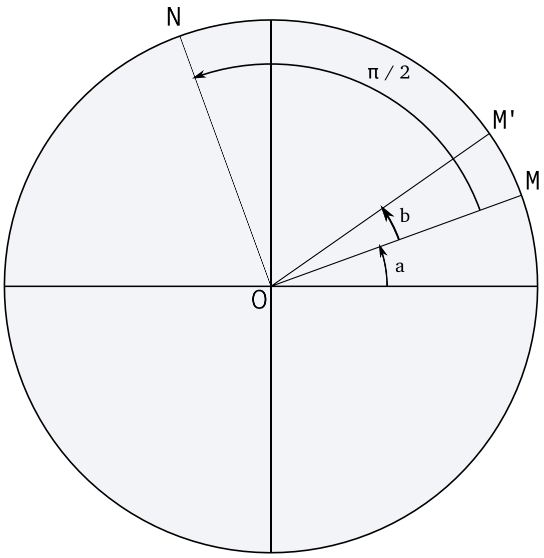
1 Cours

Les formules d'addition en trigonométrie sont :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

2 Démonstration

Soit un cercle trigonométrique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient trois points M, M' et N du cercle tels que :
- M tel que $(\vec{OI}, \vec{OM}) = a\,(2\pi)$
- M' tel que $(\vec{OI}, \vec{OM'}) = a + b\,(2\pi)$
- N tel que $(\vec{OM}, \vec{ON}) = \frac{\pi}{2}\,(2\pi)$



Le point M' dans le repère orthonormal $(O, \vec{OM}, \vec{ON})$ est tel que $(\vec{OM}, \vec{OM'}) = b\,(2\pi)$.
Donc :

$$\vec{OM'} = \cos(b)\vec{OM} + \sin(b)\vec{ON} \tag{1}$$

Or dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a :

- $\vec{OM} = \cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}$
- $\vec{ON} = \cos(a+\frac{\pi}{2})\vec{i} + \sin(a+\frac{\pi}{2})\vec{j} = -\sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j}$ car $\cos(a+\frac{\pi}{2}) = -\sin(a)$ et $\sin(a+\frac{\pi}{2}) = \cos(a)$.

$$\begin{aligned}
(1) \quad \Leftrightarrow \quad & \vec{OM} = \cos(b) \times (\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}) + \sin(b)(-\sin(a)\vec{i} + \cos(a))\vec{j} \quad (2) \\
\Leftrightarrow \quad & (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))\vec{i} + (\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a))\vec{j} \quad (3)
\end{aligned}$$

Or dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
$\vec{OM'}$ a pour coordonnées $\cos(a+b)\vec{i} + \sin(a+b)\vec{j}$. Par identification, on en déduit donc les relations cherchées :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

CQFD.